CONCOURS SPECIAL D'ENTREE AUX GRANDES ECOLES SCIENTIFIQUES

1985

ÉPREUVE DE CALCUL NUMÉRIQUE

DURÉE : 2 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calculs est autorisé.

Le but du problème est de trouver une formule d'intégration approchée d'une fonction f à valeurs réelles de classe C^∞ sur $[-1, 1]$, de donner un majorant de l'erreur, puis de tester expérimentalement la performance de la méthode.

1. Choix des points d'interpolation.

a. Montrer qu'il existe un polynôme T_5 tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad \cos 5\theta = T_5(\cos \theta)$$

et calculer les coefficients de T_5. Déterminer $\sup_{[-1,1]} |T_5|$.

b. On note x_1 et x_2 les zéros de T_5 vérifiant : $0 < x_2 < x_1$.

Donner les valeurs exactes (rationnelles) de $x_1^2 x_2^2$ et de $x_1^2 + x_2^2$.

En déduire celles de x_1^2 et de x_2^2.

2. Explicitation de la formule d'intégration approchée.

a. Montrer qu'il existe un polynôme L_5 et un seul de dégré inférieur ou égal à 4, prenant la même valeur que f aux cinq points : $-x_1$, $-x_2$, 0, x_2, x_1. (On ne demande pas d'expliciter L_5.)

b. On se propose d'approcher $\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx$ par $\int_{-1}^{+1} L_5(x)\,dx$.

Comme l'intégrale d'un monôme de degré impair sur $[-1, 1]$ est nulle, on ne conserve que le polynôme P formé des monômes de L_5 ayant un degré pair.

Montrer que P peut s'écrire sous la forme

$$P(x) = \lambda (x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2) + \mu x^2 (x^2 - x_2^2) + \nu x^2 (x^2 - x_1^2).$$

Expliciter λ, μ, ν en fonction de x_1 et x_2 et des valeurs de f aux cinq points précédents.

c. En déduire la formule

$$(1) \qquad \int_{-1}^{+1} L_5(x)\,dx = \frac{46}{75} f(0) + \frac{26 - 6\sqrt{5}}{75} (f(x_1) + f(-x_1)) + \frac{26 + 6\sqrt{5}}{75} (f(x_2) + f(-x_2)).$$

Calculer les coefficients de cette formule à 10^{-6} près.

3. Évaluation d'un majorant de l'erreur.

a. On considère le polynôme L_6 défini par

$L_6(x) = L_5(x) - A\,T_5(x)$, où A est une constante.

Montrer que

$$\int_{-1}^{+1} L_6(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} L_5(x)\,dx.$$

b. On choisit A telle que $L_6'(0) = f'(0)$ et on considère la fonction g définie par

$g(x) = f(x) - L_6(x) - B\,x\,T_5(x)$, où B est une constante.

Soit $t \in [-1, 1]$ et non zéro de T_5 ; on choisit alors B telle que $g(t) = 0$.

Montrer que g s'annule en 6 points de $[-1, 1]$ et que $g'(0) = 0$.

Par applications répétées du théorème de Rolle, prouver qu'il existe $\alpha \in]-1, +1[$ tel que : $g^{(6)}(\alpha) = 0$, et que, dans ces conditions, $B = \dfrac{f^{(6)}(\alpha)}{2^4 . 6!}$.

En déduire que

$$\forall\, t \in [-1, 1],\ |f(t) - L_6(t)| \leqslant \frac{|t\,T_5(t)|}{2^4 . 6!}\,M_6, \quad \text{où} \quad M_6 = \sup_{[-1,1]} |f^{(6)}|.$$

c. Établir la formule

$$(2) \qquad \left| \int_{-1}^{+1} [f(x) - L_5(x)]\,dx \right| \leqslant \frac{1}{2^4}\,\frac{M_6}{6!}.$$

4. Tests expérimentaux de la performance.

a. Soit $f(x) = \dfrac{2}{1 + x^2}$.

Calculer, en utilisant une décomposition simple, l'expression de la dérivée d'ordre n de f, et en déduire un majorant de $|f^{(6)}|$ sur $[-1, 1]$.

Calculer une valeur approchée de l'intégrale de f par une primitive, puis par application de la formule (1).

Calculer un majorant de l'erreur par la formule (2). Conclure.

b. Soit $f(x) = \dfrac{1}{(2 - x)\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$.

Calculer une primitive de f à l'aide du changement de variable $t = 2 - x$.

Comparer les valeurs approchées de l'intégrale de f sur $[-1, 1]$ obtenues en utilisant une primitive, puis la formule (1).